THE JOURNAL OF SYMBOLIC LOGIC
Volume 18, Number 1, March 1953

EINE BEMERKUNG ZU HENKIN'S BEWEIS FÜR DIE VOLLSTÄNDIGKEIT DES PRÄDIKATENKALKÜLS DER ERSTEN STUFE

G. HASENJAEGER

Im Folgenden wird eine Vereinfachung der Beweisanordnung für Henkin's Theorem [2] p. 162 angegeben (Abschnitt I). — Die Vereinfachung zeigt sich u.a. darin, daß für den abgeänderten Beweis eine Abschätzung der "projektiven Klasse" (im Sinne der Kleene–Mostowski'schen Theorie der projektiven Mengen von natürlichen Zahlen [1]) für das zu konstruierende Modell gelingt (Abschnitte II–IV)[2]. Die Kenntnis der Henkin'schen Arbeit wird vorausgesetzt.

I. Um eine maximale widerspruchsfreie Menge Γ_ω von geschlossenen Formeln, in der zu jeder Existenzaussage $(\exists x)A(x)$ eine Beispielaussage $A(u_{ij})$ vorhanden ist, zu erhalten, führt Henkin einen Turm von Kalkülen $S_0, S_1, \ldots, S_i, \ldots$ und dessen Vereinigung S_ω ein. *Abwechselnd* wird dann die gegebene Menge von Formeln in S_i zu einer maximalen widerspruchsfreien Menge Γ_i erweitert und in S_{i+1} durch Hinzunahme von Beispielaussagen für alle Existenzaussagen aus Γ_i ergänzt, für die das nicht schon in einem früheren Schritt geschehen ist. Γ_ω ist dann die Vereinigung aller Γ_i.

Die Vereinfachung besteht nun darin, daß — nach Erweiterung von S_0 zu einem Kalkül S^* durch Hinzunahme einer einfachen Folge $u_1, u_2, \ldots$ von "neuen" Konstanten — in S^* zu jeder Existenzaussage eine *bedingte* Beispielaussage gebildet wird. K sei die Klasse dieser Aussagen, Λ die gegebene widerspruchsfreie Menge; dann wird $\Lambda^* = K \cup \Lambda$ in S^* *einmal* zu einer maximalen widerspruchsfreien Menge ergänzt.[3]

Unter Verwendung der Standard-Anordnung aller geschlossenen Formeln

Received July 26, 1951.

[1] Vgl. [5], [7].

[2] Daß diese Abschätzung für geeignete Beweise des Gödel'schen Vollständigkeitssatzes gilt, ist dem Verfasser durch einen Vortrag von S. C. Kleene, gehalten am 20. Juni 1950 in Münster i.W., bekanntgeworden.

Die Beweise, für welche Kleene diese Abschätzung erhalten hat, sind (nach einer späteren ergänzenden Mitteilung Kleene's) einmal der aus [4] §§ 3 und 4, und dann einer von ihm selbst, der von einer pränexen Normalform ausgeht und dazu einiges von Henkin's Methode benutzt; dieser ist — mit einem Beweis für die Abschätzung — erschienen in [6] § 72, als Sätze 34 und 35.

[3] Nach Einsendung einer früheren Fassung dieser Arbeit (in welcher noch wie in [2] doppelt indizierte „neue" Konstanten benutzt wurden) an das JOURNAL erfuhr der Verfasser durch eine briefliche Mitteilung Henkin's (vom 4. Mai 1951), daß dieser eine solche Vereinfachung schon früher entdeckt hatte. Der vorliegende Text berücksichtigt Henkin's Mitteilung. — Eine Darstellung, die einem Manuskript Henkin's (vom 25 Juli 1950) folgt, wird in [1] Kap. 5 erscheinen.

von S^* erhalten wir für diejenigen von der Form $(\exists x)A(x)$ eine Aufzählung $(\exists x)A_i(x)$, dazu eine Indexfolge j_i $(i = 1, 2, \ldots)$, definiert durch:

$$j_1 =_{\mathrm{Df}} \operatorname*{Min}_j [u_j \text{ nicht in } (\exists x)A_1(x)],$$

$$j_{i+1} =_{\mathrm{Df}} \operatorname*{Min}_j [u_j \text{ nicht in } A_1(u_{j_1}), A_2(u_{j_2}), \ldots, A_i(u_{j_i}), (\exists x)A_{i+1}(x)].$$

K ist dann die Klasse aller Formeln der Gestalt $(\exists x)A_i(x) \supset A_i(u_{j_i})$. Analog wie in [2] p. 162 erhalten wir:

Ist Λ widerspruchsfrei in S_0, so ist $\Lambda^* = K \cup \Lambda$ widerspruchsfrei in S^*.

Nun werde eine maximale widerspruchsfreie Erweiterung Γ^* von Λ^* in derselben Weise bestimmt, wie das für Γ_0 und Λ in [2] beschrieben ist. Λ^* ist abgeschlossen in Bezug auf Abtrennung, enthält also mit $(\exists x)A_i(x)$ auch $A_i(u_{j_i})$.[4] M sei das nach der Methode von [2] bestimmte Modell von Γ^* in der Menge der Konstanten von S^*.

Die beschriebene Beweisanordnung ist durch den Hilbert'schen ε-Kalkül nahegelegt und der Übergang von Λ zu Λ^* ist in gewissem Sinne das zweite ε-Theorem.[5] Der hier benutzte Formalismus ist aber elementarer und überschreitet nicht den des eigentlichen Prädikatenkalküls, da in K die Abhängigkeit der u_{j_i} von Parametern nicht durch Funktionszeichen zum Ausdruck gebracht wird.

II. Ein Modell für ein "Axiomensystem" Λ — in dem die Prädikatensymbole G_i vorkommen mögen — ist im Wesentlichen durch die den G_i zugeordneten Relationen (Mengen von n_i-tupeln) — die *Belegung* der G_i — bestimmt. Ist der Individuenbereich dabei die Menge der natürlichen Zahlen, so werde unter der *projektiven Klasse des Modells* die niedrigste projektive Klasse (falls es eine solche gibt) verstanden, der diese Relationen zugleich angehören.

Von dem oben eingeführten Modell M von Γ^* (und damit von Λ) kann man leicht zu einem Modell im Bereich der natürlichen Zahlen gelangen. Da die Belegung der G_i in einfacher Weise durch Γ^* bestimmt ist, haben wir zunächst die projektive Klasse von Γ^* zu ermitteln. Es ist üblich, die hierfür erforderlichen Betrachtungen über Klassen von Zeichenreihen vermittels einer Gödel-Numerierung in die Arithmetik zu verlegen. Um Detail zu vermeiden, benutzen wir, daß die Entscheidbarkeit (Existenz eines Entscheidungsverfahrens im anschaulichen Sinne) einer Klasse oder Relation K von Zeichen eine hinreichende Bedingung dafür ist, daß die Klasse oder Relation $\underline{K}$ der Gödel–Nummern von K allgemeinrekursiv ist.

---

[4] Hierbei kann man sich auf solche Formeln beschränken, in denen die gebundenen Variablen in der Reihenfolge ihres Auftretens den Anfang einer Standardfolge bilden.

[5] Vgl. hierzu [4] S. 9, 18.

Entsprechendes gilt für Funktionen. Meistens kommt man sogar mit *primitiv*-rekursiven Relationen und Funktionen aus.[6]

Wir setzen die Entscheidbarkeit der benutzten Standard-Anordnung der geschlossenen S^*-Formeln voraus — es sei etwa die nach wachsender Gödel-Nummer. Dann ist j_i eine rekursive Funktion von i, und die Klasse K (der Implikationen $(\exists x)A_i(x) \supset A_i(u_{j_i})$) ist entscheidbar, also $\underline{K}$ rekursiv.

Ebenso sind entscheidbar die Beziehungen

(1) A ist ein Glied einer endlichen Folge B,

(2) A ist das letzte Glied einer endlichen Teilfolge C der Standard-Anordnung,

(3) B ist ein Beweis für A aus der endlichen Prämissenfolge C (die wirklich in B vorkomme).

Die durch den Übergang zu den Gödel-Nummern zugeordneten Relationen

(1) $Gld(a, b)$, (2) $End(a, c)$, (3) $Bew(b, a, c)$

sind also rekursiv.

Sei nun zunächst auch A als entscheidbar vorausgesetzt — als Axiomensystem wird A oft sogar endlich sein. Dann ist, wegen $Bew(b, a, c) \supset c \leq b$ und $Gld(a, b) \supset a \leq b$, auch

$$Bew(b, a) =_{\mathrm{Df}} (\exists x)(Bew(b, a, x) \,.\, (y)(Gld(y, x) \supset y \in A^*))$$

rekursiv (der Durchgang durch die dreistellige Beziehung $Bew(b, a, c)$ wurde mit Rücksicht auf den in IV zu behandelnden allgemeineren Fall gewählt).

Die Gödel-Nummer der Negation der Konjunktion aus den Gliedern einer endlichen Formelfolge C (in Standard-Anordnung) ist eine rekursive Funktion $f(c)$ der Gödelnummer von C. Ebenso ist die Gödel-Nummer der nach der folgenden Vorschrift aus C gebildeten Konjunktion $K(C)$ eine rekursive Funktion $g(c)$ der Gödel-Nummer von C. Für $C = [A_{n_1}, A_{n_2}, \ldots, A_{n_k}]$, wo $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ und A_i die Standard-Anordnung ist, sei

$$\begin{aligned} K(C) =_{\mathrm{Df}} & \sim(A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_{n_1-1}) \,.\, A_{n_1} \supset \sim(A_{n_1+1} \vee \ldots \vee A_{n_2-1}) \\ & .\, (A_{n_1} \,.\, A_{n_2}) \supset \sim(A_{n_2+1} \vee \ldots \vee A_{n_3-1}) \,.\, \ldots \\ & .\, (A_{n_1} \,.\, \ldots \,.\, A_{n_{k-1}}) \supset \sim(A_{n_{k-1}+1} \vee \ldots \vee A_{n_k-1}). \end{aligned}$$

Ist c nicht Nummer einer Teilfolge der Standard-Anordnung, so sei zur Festlegung der Wertverläufe etwa $f(c) = g(c) = 0$ gesetzt.

Ist nun c Nummer einer (endlichen) Teilfolge C der Standard-Anordnung, so ist C offenbar genau dann Anfang der durch das Bildungsgesetz von Γ^*

[6] Vgl. hierzu [4] Supplement II. Die im Folgenden vorkommenden Relationen und Funktionen könnten z.B. effektiv bestimmt werden unter Benutzung von [4] § 4.

bestimmten Folge, wenn[7]

$$(\exists y)Bew(y, g(c)) \,.\, \sim(\exists z)Bew(z, f(c))$$

und a ist genau dann Nummer einer Formel A aus Γ^*, wenn

$$(*) \qquad (\exists x)(End(a, x) \,.\, (\exists y)Bew(y, g(x)) \,.\, \sim(\exists z)Bew(z, f(x)))$$

oder in pränexer Form

$$(\exists x)(\exists y)(z)(End(a, x) \,.\, Bew(y, g(x)) \,.\, \sim Bew(z, f(x))).$$

Unter Benutzung einer rekursiven Numerierung der Paare erhält man schließlich eine Formel $(\exists x)(z)\mathfrak{A}(a, x, z)$ mit rekursivem $\mathfrak{A}$.

Andererseits erhält man für die Nummern der Formeln aus Γ^* eine Bedingung der Form $(x)(\exists z)\mathfrak{B}(a, x, z)$ auf die folgende Weise. Da die Menge der geschlossenen Formeln entscheidbar ist, gibt es zu der entsprechenden Menge von Nummern eine rekursive Formel $Clf(a)$. Die Nummer der Negation einer Formel A ist eine rekursive Funktion $Neg(a)$ der Nummer von A. Da nun A in Γ^* genau dann, wenn A eine geschlossene Formel ist, und nicht $\sim A$ in Γ^*, ergibt sich die Darstellung $Clf(a) \,.\, \sim(\exists x)(z)\mathfrak{A}(Neg(a), x, z)$, oder in pränexer Form $(x)(\exists z)(Clf(a) \,.\, \sim\mathfrak{A}(Neg(a), x, z))$.

Wir haben also für die Klasse $\underline{\Gamma}^*$ der Nummern der Formeln aus Γ^* sowohl eine Darstellung in der Form $(\exists x)(y)\mathfrak{A}(a, x, y)$ als auch in der Form $(x)(\exists y)\mathfrak{B}(a, x, y)$; d.h., in der Terminologie von [7], $\underline{\Gamma}^* \in \boldsymbol{P}_2 \frown \boldsymbol{Q}_2$. — $\mathfrak{C}(a)$ stehe im Folgenden wahlweise für $(\exists x)(y)\mathfrak{A}(a, x, y)$ oder $(x)(\exists y)\mathfrak{B}(a, x, y)$.

Nun sei $g_i(a_1, \ldots, a_{n_i})$ die Nummer der Primformel aus dem Prädikatensymbol G_i und den Argumenten mit den Nummern $a_1, \ldots, a_{n_i}$, und $k(c)$ sei eine Aufzählung der Nummern der Konstanten von S^*. Die Funktionen g_i und k können als rekursiv vorausgesetzt werden. Dann ist die Belegung von G_i bestimmt durch $\mathfrak{G}_i(a_1, \ldots, a_{n_i}) =_{\mathrm{Df}} \mathfrak{C}(g_i(k(a_1), \ldots, k(a_{n_i})))$. Die durch $\mathfrak{G}_1$ dargestellte Relation gehört offenbar wieder zu $\boldsymbol{P}_2 \frown \boldsymbol{Q}_2$. Wir erhalten also den Satz:

Jedes entscheidbare Axiomensystem besitzt ein Modell der Klasse $\boldsymbol{P}_2 \frown \boldsymbol{Q}_2$.

III. Kommt unter den Prädikatensymbolen das Identitätszeichen vor, so ist eine zusätzliche Betrachtung notwendig. Da in diesem Falle zu Λ die Identitätsaxiome gehören, liefert die beschriebene Konstruktion als Belegung von "$=$" zunächst eine Äquivalenzrelation — diese sei dargestellt durch $\mathfrak{J}(a, b)$ — und sonst Relationen, die nur von den Klassen nach dieser Äquivalenzrelation abhängen. Ein vollständiges Repräsentantensystem für das System der Äquivalenzklassen wird ausgesondert durch die Bedingung $\mathfrak{R}(b) =_{\mathrm{Df}} (x)(x < b \supset \sim\mathfrak{J}(x, b))$. Wir können voraussetzen, daß dieses System unendlich ist; andernfalls sind die folgenden Betrachtun-

[7] Man beachte, daß bei der Bildung von Γ^* auch die Elemente von Λ^* in der Reihenfolge der Standard-Anordnung berücksichtigt werden.

gen überflüssig. Um eine Formel $\mathfrak{E}(a, b)$ zu erhalten, welche eine eineindeutige Abbildung aller natürlichen Zahlen auf dieses Repräsentantensystem beschreibt, setzen wir

$$\mathfrak{D}(a, b) =_{\mathrm{Df}} (\exists y)[\nu(y, 0) = 0 \,.\, (x)(x < b \,.\, \mathfrak{R}(x+1) \supset \nu(y, x+1) = \nu(y, x)+1) \,.\, (x)(x < b \,.\, \sim\mathfrak{R}(x+1) \supset \nu(y, x+1) = \nu(y, x)) \,.\, \nu(y, b) = a],^{8}$$

$$\mathfrak{E}(a, b) =_{\mathrm{Df}} \mathfrak{D}(a, b) \,.\, \mathfrak{R}(b).$$

Dabei ist $\nu(a, b)$ eine rekursive Funktion mit der Eigenschaft, daß es zu jeder endlichen Folge $[x_0, \ldots, x_k]$ von natürlichen Zahlen eine Zahl n gibt, sodass für alle $i \leq k$, $\nu(n, i) = x_i$.[9] $\mathfrak{D}(a, b)$ bedeutet also inhaltlich: $a+1$ ist die Anzahl der Repräsentanten $< b+1$, und $\mathfrak{E}(a, b)$ besagt: b ist der $(a+1)$-te Repräsentant.

Offenbar erhalten wir ein Modell mit richtiger Identität, wenn wir (für jedes vorkommende i) als Belegung von G_i die Relation wählen, die durch die Formel $\mathfrak{G}_i^*(a_1, \ldots, a_{n_1})$ beschrieben wird, wo

$$\mathfrak{G}_i^*(a_1, \ldots, a_{n_i}) =_{\mathrm{Df}} (\exists x_1) \ldots (\exists x_{n_i})(\mathfrak{E}(a_1, x_1) \,.\, \ldots \,.\, \mathfrak{E}(a_{n_i}, x_{n_i}) \,.\, \mathfrak{G}_i(x_1, \ldots, x_{n_i})).$$

Mit $\mathfrak{G}_i^*(a_1, \ldots, a_{n_i})$ ist auf Grund der Eigenschaften von $\mathfrak{E}(a, b)$ äquivalent die Formel

$$\mathfrak{G}_i^{**}(a_1, \ldots, a_{n_i}) =_{\mathrm{Df}} (x_1) \ldots (x_{n_i})(\sim\mathfrak{E}(a_1, x_1) \vee \ldots \vee \sim\mathfrak{E}(a_{n_i}, x_{n_i}) \vee \mathfrak{G}_i(x_1, \ldots, x_{n_i})).$$

Um einzusehen, daß das so bestimmte Modell wieder zu $P_2 \frown Q_2$ gehört, brauchen wir nur geeignete pränexe Normalformen für $\mathfrak{G}_i^*$ und $\mathfrak{G}_i^{**}$ herzustellen. Dabei stören die beschränkten Quantifikatoren $(x)(x < b \supset \ldots)$ auf Grund der beweisbaren Äquivalenz

$$(\ast)^{10} \qquad (x)(x < b \supset (\exists y)\mathfrak{H}(x, y)) \equiv (\exists y)(x)(x < b \supset \mathfrak{H}(x, \nu(y, x)))$$

nicht, können also an ihrer Stelle gelassen werden. Wir drücken $\mathfrak{G}_i^*$ [bzw. $\mathfrak{G}_i^{**}$] auf Grund der angegebenen Definitionen durch $\mathfrak{E}$ aus. Wir bringen die aus der Definition von $\mathfrak{D}$ stammenden $(\exists y)$ — nach passenden Umbenennungen — nach vorn und erhalten zum Präfix einen Beitrag $(\exists y_1) \ldots (\exists y_{n_i})$ [zu $\mathfrak{G}_i^{**}$: $(y_1) \ldots (y_{n_i})$]. Nun wählen wir $\mathfrak{E}$ überall so, daß beim Herstellen der Normalform der äußere Quantifikator (von $\mathfrak{E}$) in ein Existenz- [zu $\mathfrak{G}_i^{**}$: All-] zeichen übergeht und bringen erst von allen $\mathfrak{E}$ die äußeren,

[8] Das hiermit gleichwertige Definiens $(y)\,(\ldots \supset \nu(y, b) = a)$ ist für das Folgende nicht brauchbar. Man kann aber für y eine rekursiv von b abhängige Schranke angeben; dann wird $(\exists y)$ bzw. (y) unwesentlich für die Bestimmung des Präfixes.

[9] Vgl. [3] pp. 319, 320.

[10] Dies folgt aus der oben angegebenen Eigenschaft von $\nu(a, b)$. Man beachte, daß sich bei Umformungen mit Hilfe dieser Äquivalenz die Argumente des umzuformenden Ausdrucks ändern.

danach die inneren Quantifikatoren nach vorn. Durch Zusammenfassung der gleichartigen Quantifikatoren (unter Benutzung einer rekursiven Numerierung der k-tupel) erhalten wir schließlich das gesuchte Präfix $(\exists x)(y)$ [zu $\mathfrak{S}_i^{**}$: $(x)(\exists y)$].

IV. Betrachten wir nun noch den allgemeineren Fall, daß Λ nicht notwendig entscheidbar, aber in der *Protosyntax* (d.h.: "alle" und "es gibt" ist beschränkt auf Zeichenreihen) definierbar ist. Naheliegende Beispiele hierfür liefern die Formelmengen Λ, die man erhält, indem man, nach Wahl einer geeigneten zahlentheoretischen Formel $\mathfrak{F}(c)$, alle zutreffenden Aussagen $\mathfrak{F}(0^{(n)})$ zu einem zahlentheoretischen Axiomensystem hinzufügt.[11] Ist dabei $\mathfrak{F}(c)$ von der Form[12] $\mathfrak{P}^k\mathfrak{x}\mathfrak{F}_0(c, \mathfrak{x})$ oder $\mathfrak{P}_k\mathfrak{x}\mathfrak{F}_0(c, \mathfrak{x})$, mit rekursivem $\mathfrak{F}_0$, so ist auch $\underline{\Lambda}$ durch eine Formel $\mathfrak{P}^k\mathfrak{x}\mathfrak{B}(c, \mathfrak{x})$ bzw. $\mathfrak{P}_k\mathfrak{x}\mathfrak{B}(c, \mathfrak{x})$, mit rekursivem $\mathfrak{B}$, darstellbar, d.h. $\underline{\Lambda}$ ist von der Klasse $\boldsymbol{P}_k$ bzw. $\boldsymbol{Q}_k$ im Sinne von [7]. — Es gilt:

(a) Ist $\underline{\Lambda}$ in $\boldsymbol{P}_{k+1}$, so gibt es ein Modell von Λ in $\boldsymbol{P}_{k+2} \frown \boldsymbol{Q}_{k+2}$,

(b) Ist $\underline{\Lambda}$ in $\boldsymbol{Q}_k$, so gibt es ein Modell von Λ in $\boldsymbol{P}_{k+2} \frown \boldsymbol{Q}_{k+2}$.

Anm.: In (b) ist für $k = 0$ das Resultat von II und III enthalten.

Beweis: Auf Grund der Konstruktion des Modells aus Γ^* und wegen $\boldsymbol{Q}_k \subseteq \boldsymbol{P}_{k+1}$, genügt es zu zeigen:

Wenn $\underline{\Lambda}$ in $\boldsymbol{P}_{k+1}$, so $\underline{\Gamma}^*$ in $\boldsymbol{P}_{k+2} \frown \boldsymbol{Q}_{k+2}$.

Das kommt darauf heraus, eine geeignete pränexe Normalform von (*), der charakteristischen Bedingung für $\underline{\Gamma}^*$, herzustellen. Da die in der Definition von $Bew(b, a)$ explizit erscheinenden Quantifikatoren beschränkt sind, kann das für Λ charakteristische Präfix $\mathfrak{P}^{k+1}\mathfrak{x}$, das implizit in $y \in \underline{\Lambda}^*$ vorkommt, an den Anfang von $Bew(b, a)$ gebracht werden,[13] und zwar ohne "Inversion". Durch Paar-Numerierung und einfache Anwendungen des Prädikatenkalküls erhalten wir also für $(\exists y)Bew(y, g(x))$ und $\sim(\exists z)Bew(z, f(x))$ Äquivalente der Form $\mathfrak{P}^{k+1}\mathfrak{y}$___ bzw. $\mathfrak{P}_{k+1}\mathfrak{z}\ldots$, und (*) geht über in

$$(\exists x)(End(a, x) \,.\, \mathfrak{P}^{k+1}\mathfrak{y}\_\_\_ \,.\, \mathfrak{P}_{k+1}\mathfrak{z}\ldots).$$

Bringt man nun zunächst das erste Glied von $\mathfrak{P}^{k+1}\mathfrak{y}$, dann jeweils die ersten Glieder von $\mathfrak{P}_k\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{P}_{k+1}\mathfrak{z}$, $\mathfrak{P}^{k-1}\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{P}^k\mathfrak{z}$, ... nach vorn, so entsteht schließlich eine pränexe Formel, die durch Zusammenfassung gleichartiger

[11] "$0^{(n)}$" ist ein Zeichen für die Zahl n. Bei genauerer Durchführung müßten hier die Zeichen für mathematische Funktionen entweder wie in [3] p. 465 eliminiert oder, was ohne Schwierigkeiten möglich ist, in den Vollständigkeitsbeweis einbezogen werden.

[12] "$\mathfrak{P}^j\mathfrak{x}$" bzw. "$\mathfrak{P}_j\mathfrak{x}$" stehe als Abkürzung für "alternierende" Präfixe, wobei

$$\mathfrak{P}^1\mathfrak{x} =_{\mathrm{Df}} (\exists x_1), \qquad \mathfrak{P}_1\mathfrak{x} =_{\mathrm{Df}} (x_1),$$
$$\mathfrak{P}^{j+1}\mathfrak{x} =_{\mathrm{Df}} (\exists x_{j+1})\mathfrak{P}_j\mathfrak{x}, \quad \mathfrak{P}_{j+1}\mathfrak{x} =_{\mathrm{Df}} (x_{j+1})\mathfrak{P}^j\mathfrak{x}.$$

[13] Man benutzt dabei wieder die Äquivalenz $(\overset{*}{*})$.

Quantifikatoren auf die Form $\mathfrak{P}^{k+2}\mathfrak{x}\mathfrak{A}(a, \mathfrak{x})$, mit rekursivem $\mathfrak{A}$ gebracht werden kann. Eine äquivalente Darstellung $\mathfrak{P}_{k+2}\mathfrak{x}\mathfrak{B}(a, \mathfrak{x})$ erhält man wie am Ende von II, und beide Darstellungen zusammen ergeben: $\underline{\Gamma}^* \epsilon\, \boldsymbol{P}_{k+2} \frown \boldsymbol{Q}_{k+2}$.

Steht jetzt $\mathfrak{C}(a)$ wahlweise für $\mathfrak{P}^{k+2}\mathfrak{x}\mathfrak{A}(a, \mathfrak{x})$ bzw. $\mathfrak{P}_{k+2}\mathfrak{x}\mathfrak{B}(a, \mathfrak{x})$, so bleibt die Konstruktion der $\mathfrak{G}_i$ unverändert. Für den Kalkül mit Identität kann der Abschnitt III übernommen werden, wobei nur "$\boldsymbol{P}_2 \frown \boldsymbol{Q}_2$" durch "$\boldsymbol{P}_{k+2} \frown \boldsymbol{Q}_{k+2}$" zu ersetzen ist, und statt der äußeren und inneren Quantifikatoren von $\mathfrak{C}$ schrittweise jeweils die r-ten $(1 \leq r \leq k+2)$ nach vorn zu bringen sind.

Die Frage, ob die in Abschnitt I und II beschriebene Modellkonstruktion in dem Sinne optimal ist, daß es zu jedem $k \geq 0$ eine widerspruchsfreie Menge Λ mit $\underline{\Lambda}$ in $\boldsymbol{P}_{k+1}$ bzw. $\boldsymbol{Q}_k$ gibt, für welche sich die Abschätzung (a) bzw. (b) *nicht* verschärfen läßt, bleibt offen.

LITERATUR

[1] Church, Alonzo, ***Introduction to mathematical logic, part I,*** bevorstehende revidierte und erweiterte Auflage.

[2] Henkin, Leon, *The completeness of the first-order functional calculus*, this Journal, vol. 14 (1949), pp. 159–166.

[3] Hilbert–Bernays, ***Grundlagen der Mathematik I,*** Berlin 1934.

[4] Hilbert–Bernays, ***Grundlagen der Mathematik II,*** Berlin 1939.

[5] Kleene, S. C., *Recursive predicates and quantifiers*, ***Transactions of the American Mathematical Society,*** vol. 53 (1943), pp. 41–73.

[6] Kleene, S. C., ***Introduction to metamathematics,*** New York, Amsterdam, und Groningen 1952.

[7] Mostowski, A., *On definable sets of positive integers*, ***Fundamenta mathematicae,*** vol. 34 (1946), pp. 81–112.

EIDG. TECHN. HOCHSCHULE, ZÜRICH